

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2013

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea

continua en $x = 0$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

a)

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 0$ es necesario que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \frac{2}{a} \quad (*) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = \underline{f(0)} = \underline{1} \quad (**) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \frac{e^0 - e^0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeter.} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{a} = \frac{e^0 + e^0}{a} = \frac{2}{a}.$$

$$(**) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} 7^0 = \underline{1}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x+1} \right)^x = 1^\infty \Rightarrow \text{Indet. tipo } n^0 \text{ e} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1+6}{2x+1} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2x+1} \right)^x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{2x+1} = \frac{1}{n} \\ 2x+1 = 6n \\ x = \frac{6n-1}{2} \end{array} \middle\| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{6n-1}{2}} = \underline{\underline{e^3}}.$$

2º) Calcula las siguientes integrales: $\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx$. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} \cdot dx$.

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx + \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx = \int x^{-2} \cdot dx + L|x| + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + L|x| + \int x^{\frac{1}{2}-2} \cdot dx = -\frac{1}{x} + L|x| + \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx = -\frac{1}{x} + L|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = L|x| - \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C =$$

$$= L|x| - \frac{1}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C.$$

$$\underline{\underline{\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx = L|x| - \frac{1}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C}}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2-3t+2} \cdot dt. \quad (*)$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad ; ; \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{At-2A+Bt-B}{t^2-3t+2} = \frac{(A+B)t + (-2A-B)}{t^2-3t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{array} \right\} \rightarrow -A=1 \quad ; ; \quad \underline{A=-1} \quad ; ; \quad \underline{B=1}.$$

$$\int \frac{1}{t^2-3t+2} \cdot dt = -\int \frac{1}{t-1} \cdot dt + \int \frac{1}{t-2} \cdot dt = -L|t-1| + L|t-2| + C = \underline{L \left| \frac{t-2}{t-1} \right|} + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de t, resulta:

$$\underline{\underline{\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} \cdot dx = L \left| \frac{e^x-2}{e^x-1} \right|} + C}$$

3º) a) Despeja X en la ecuación matricial: $X \cdot A - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula X, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a)

$$X \cdot A - B = 2X \quad ;; \quad X \cdot A - 2X = B \quad ;; \quad X \cdot A - X \cdot 2I = B \quad ;; \quad X \cdot (A - 2I) = B.$$

Multiplicando por la derecha por $(A - 2I)^{-1}$:

$$X \cdot (A - 2I) \cdot (A - 2I)^{-1} = B \cdot (A - 2I)^{-1} \quad ;; \quad X \cdot I = B \cdot (A - 2I)^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{X = B \cdot (A - 2I)^{-1}}}.$$

b)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 2I / I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Sustituyendo en el valor de X:

$$X = B \cdot (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

4° a) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$ en función del parámetro a .

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes.

a)

Vamos a realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$, cuyo estudio mediante el

teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} ;; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M' , la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango $M =$ Rango $M' = 2 \Rightarrow$ (Puntos comunes) \Rightarrow Son rectas coincidentes.

Rango $M = 2 ;;$ Rango $M' = 3 \Rightarrow$ (No hay puntos comunes) \Rightarrow Son rectas paralelas.

Rango $M =$ Rango $M' = 3 \Rightarrow$ (Puntos comunes) \Rightarrow Las rectas se cortan en un punto.

Rango $M = 3 ;;$ Rango $M' = 4 \Rightarrow$ (No hay puntos comunes) \Rightarrow Las rectas se cruzan.

$$\text{Rango } M \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2+1=3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \begin{cases} F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \end{cases} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & a-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} = 4a+12+4 = 4a+16 = 4(a+4) = 0 \Rightarrow \underline{a = -4}.$$

Para $a = -4 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow$ Las rectas r y s se cortan en un punto

Para $a \neq -4 \Rightarrow \text{Rango } M = 3 ; ; \text{Rango } M' = 4 \Rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan

b)

Las rectas son secantes para $a = -4$. Su punto de corte es la solución del siguiente

$$\text{sistema: } \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} .$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 1 + 2z \\ \rightarrow y = 2 + z \\ \Rightarrow (1 + 2z) + (2 + z) + z = 1 ; ; 4z = -2 ; ; z = \underline{-\frac{1}{2}} ; ; x = 1 - 1 = \underline{0} ; ; \end{array}$$

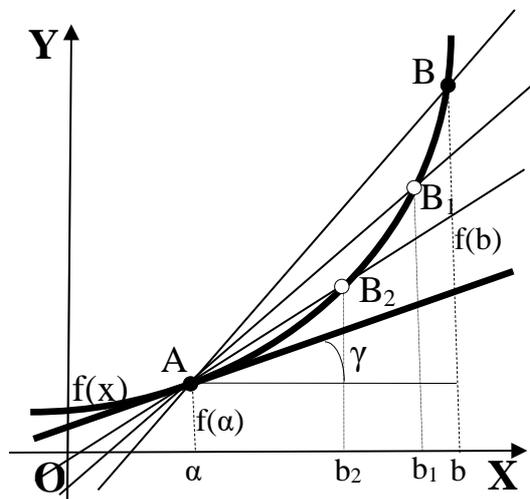
$$y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}}.$$

PROPUESTA B

1º) a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Halla el punto de la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima.

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A , de abscisa α . Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[\alpha, b]$ a la expresión:

$$TVM[\alpha, b] = \frac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha} \quad (1)$$

La $TVM[\alpha, b]$ es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los puntos A y B .

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \rightarrow \alpha$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $b - \alpha = h$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a α (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A , con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.

b)

$m = f'(x) = 3x^2 + 6x$. El valor de m será mínima cuando su derivada $[f''(x)]$ sea cero y su segunda derivada $[f'''(x)]$ sea mayor que cero.

$$m' = f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow \underline{x = -1}.$$

$$m'' = f'''(x) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = -1}.$$

El punto P de tangencia es el siguiente:

$$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3 \Rightarrow \underline{P(-1, 3)}.$$

La expresión de una recta conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada

al caso que nos ocupa es:

$$y - 3 = -1 \cdot (x + 1) = -x - 1 \Rightarrow \text{Recta tangente pedida: } \underline{\underline{t \equiv x + y - 2 = 0.}}$$

2º) a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -2x + 3$.

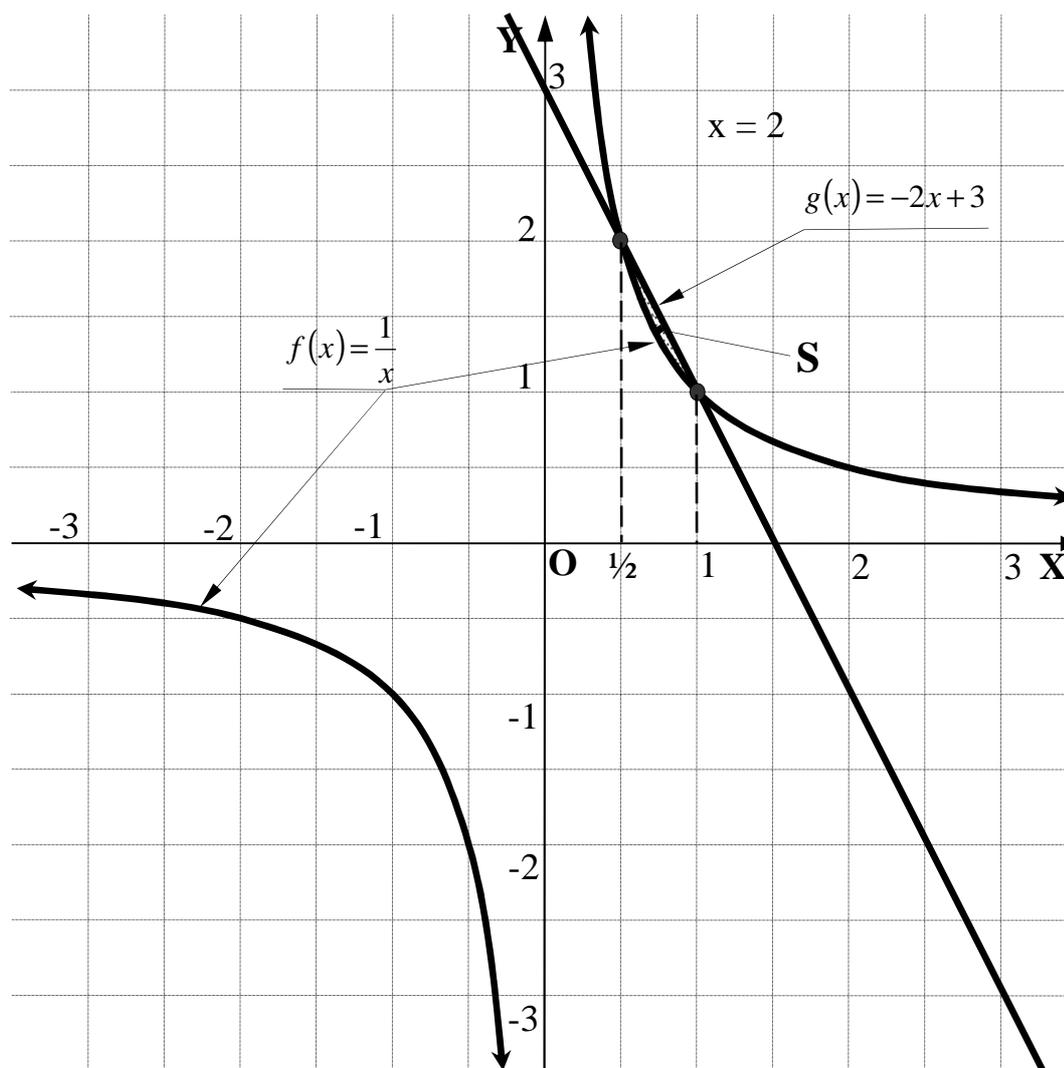
b) Calcula el área de la región anterior.

a)

Los puntos de corte de las funciones son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = -2x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = -2x + 3 \;; \; 1 = -2x^2 + 3x \;; \; 2x^2 - 3x + 1 = 0 \;; \; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 1) \end{cases} .$$



La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(-2x+3) - \frac{1}{x} \right] \cdot dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 3x - Lx \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[-x^2 + 3x - Lx \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= (-1^2 + 3 \cdot 1 - L1) - \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - L\frac{1}{2} \right] = -1 + 3 - 0 - \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - (L1 - L2) \right] = 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 0 - L2 = \\ &= \frac{8+1-6}{4} - L2 = \underline{\underline{\left(\frac{3}{4} - L2\right) u^2 \cong 0'06 u^2 = S}}. \end{aligned}$$

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-5z=-1 \\ 2x-y-3z=1-m \\ x-2y+2z=m \end{cases}$ en función del parámetro $m \in R$.

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1-m \\ 1 & -2 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } A \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 20 - 3 - 5 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

El rango de A' en función del parámetro m es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1-m \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = -m + 4 + (1-m) - 1 + 2(1-m) - 2m = \\ = -3m + 3(1-m) + 3 = -3m + 3 - 3m + 3 = 6 - 6m = 6(1-m) = 0 \Rightarrow \underline{m=1} \\ \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 1-m \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m - 4 - 5(1-m) - 3 - 2(1-m) + 10m = \\ = 7m - 7(1-m) - 7 = 7m - 7 + 7m - 7 = 6 - 6m = 6(1-m) = 0 \Rightarrow \underline{m=1} \\ \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & 1-m \\ -2 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 2 + 10(1-m) + 6 - 2(1-m) - 5m = \\ = -8m + 8(1-m) + 8 = -8m + 8 - 8m + 8 = 16 - 16m = 16(1-m) = 0 \Rightarrow \underline{m=1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\text{Para } m \neq 1 \rightarrow \text{Rango } A' = 3} \text{ ; ; } \underline{\text{Para } m = 1 \rightarrow \text{Rango } A' = 2}.$

Para $m = 1 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

Para $m \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \text{ ; ; } \text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Para $m = 1$ el sistema es $\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Des-

preciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = -1 + 5\lambda \\ 2x - y = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = -1 + 8\lambda \;; \; \underline{x = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\lambda} \;; \; y = -1 + 5\lambda - x = -1 + 5\lambda + \frac{1}{3} - \frac{8}{3}\lambda \;;$$

$$\underline{y = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\lambda \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

4º) a) Dados los puntos P(4, 2, 3) y Q(2, 0, -5), da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P con respecto al π es Q.

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y R(λ , 1, 0) pasa por el origen de coordenadas.

a)

Los puntos P y Q determinan el vector:

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (4, 2, 3) - (2, 0, -5) = (2, 2, 8).$$

El punto medio del segmento \overline{PQ} es el punto M que tiene como componentes las medias aritméticas de las sucesivas componentes de P y Q: M(3, 1, -1).

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = (2, 2, 8)$, por ejemplo, $\vec{n} = (1, 1, 4)$.

La expresión general del plano π es de la forma $\pi \equiv x + y + 4z + D = 0$.

El plano π tiene que contener al punto M(3, 1, -1), por lo cual, debe satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 4z + D = 0 \\ M(3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 1 + 4 \cdot (-1) + D = 0 \ ; \ ; \ 4 - 4 + D = 0 \ ; \ ; \ \underline{D = 0}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + 4z = 0}}$$

b)

El plano β que pasa por los puntos O, P, y R tiene la siguiente expresión general:

$$\beta(O; \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ ; \ -10x + 6y - 4z + 20y = 0 \ ; \ ; \ 10x - 26y + 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \equiv 5x - 13y + 2z = 0}}.$$

El plano β contiene al punto R, por lo que tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv 5x - 13y + 2z = 0 \\ R(\lambda, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 5\lambda - 13 + 0 = 0 \ ; \ ; \ 5\lambda = 13 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{13}{5}}}.$$
